О геометрических построениях в пространстве Лобачевского.

Д. Мордухай-Болтовской (Ростов н. Д.).

§ 1. Задача Эвклидовой Геометрии о построениях с помощью циркуля и линейки—в Геометрии Лобачевского обращается в задачу о построениях с помощью инструментов, вычерчивающих: 1) прямую, 2) окружность любого радиуса и 3) так называемый «гиперцикл», линию постоянного расстояния.

Прямую вычерчивает линейка, окружность циркуль, гиперцикл—особый инструмент, который можно мыслить в виде наугольника, скользящего по линейке.

Такие построения будем коротко называть построениями с помощью циркуля и линейки.

Укажем прежде всего решения основных задач с помощью этих инструментов.

Как доказано Барбареном [1]), в основу следует класть свойства четырехугольника с тремя прямыми углами, который будем называть трипрямоугольником, и мы в трех последующих параграфах развиваем мысли Барбарена.

Пусть в 4-угольнике $OPQR$: $\angle O = P = \angle Q =$ прямые. R же острый угол; $x = \frac{QR}{k}$, $x' = \frac{OP}{k}$, $y = \frac{RP}{k}$, $y' = \frac{OQ}{k}$, $\lambda = \frac{QP}{k}$, $z = \frac{OR}{k}$, где k параметр пространства, который можем принять равным 1.

Тогда из ΔQRP

$$\frac{sinR}{sh\lambda} = \frac{sinPQR}{shy} = \frac{csOQP}{shy'},$$

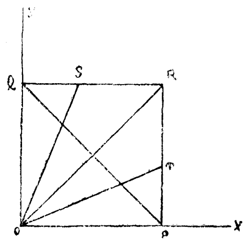
Но из ΔOQP

$$csOQP = \frac{thy'}{th\lambda};\ sinR = \frac{ch\lambda}{shy}\,\frac{shy'}{chy'} = \frac{shy'}{shy}\,chx', \quad (1)$$

так как

$$ch\lambda = chx'chy'.$$

Точно таким же образом выводим, что



Чертеж 1.

1) Barbarin. Etudes de Géométrie Analytique non-Euclidienne.

$$sinR=\frac{shx'}{shx}\,chy'. \qquad (2)$$

Из ΔROP имеем:

$$shy=shz\,sinROP=shz\,csROQ.$$

а из ΔROQ

$$shy'=shz\ \ sinQRO,\ \ sinQRO=\frac{csROQ}{chx},$$

что дает

$$\frac{shy'}{shy}=\frac{1}{chx}. \qquad (3)$$

Точно таким же образом

$$\frac{shx'}{shx}=\frac{1}{chy}. \qquad (4)$$

Окончательно же получаем пропорции

$$\frac{shx}{shx'}=\frac{chy}{1}=\frac{chy'}{sinR}; \qquad (5)$$

$$\frac{shy}{shy'}=\frac{chx}{1}=\frac{chx'}{sinR}. \qquad (6)$$

Почленно разделяя, имеем

$$chx'=\frac{thy}{thy'},\qquad chy'=\frac{thx}{thx'}. \qquad (7)$$

Из равенства

$$chk=chx\,chy-shx\,shy\,csR=chx'\,chy'$$

замечая, что

$$chx=\frac{shy}{shy'},\qquad chy=\frac{shx}{shx'},\qquad chx'\,chy=chx\,chy',$$

имеем

$$\frac{chx}{chy}\,ch^2y'-chx\,chy=-shx\,shy\,csR,$$

откуда, так как по (3)

$$sh^2y-sh^2y'=\frac{sh^2x}{ch^2x}\,sh^2y,$$

получаем

$$csR=thx\,thy. \qquad (8)$$

А в силу (7) также

$$csR=shx'\,shy' \qquad (9)$$

§ 2. Отсюда Барбарен отмечает такие весьма важные для последующего теоремы.

Если описать из O радиусом равным y круг, пересекающий QR в точке S, то $OS \parallel RP$ и таким же образом, если $OT=x$, то $OT \parallel QR$.

В самом деле, уравнения (6) и (5) дают

$$\frac{shx}{shx'}=chy,\qquad \frac{shy}{shy'}=chx.$$

Но из $\triangle OPT$ и $\triangle OQS$ имеем

$$\frac{shx}{shx'}=\frac{1}{sinOTP}\qquad \frac{shy}{shy'}=\frac{1}{sinOSQ};$$

поэтому

$$sin OTP = \frac{1}{chy}, \qquad sin OSQ = \frac{1}{chx},$$

что указывает на то, что $\angle\ OTP$—угол параллельности, отвечающий y, $\angle\ OSQ$—отвечающий x.

Далее, сравнивая уравнение (7) с равенством, вытекающим из $\triangle\ OPT$ и $\triangle\ OQS$:

$$\frac{thy}{thy'} = \frac{1}{csSOQ} = \frac{1}{sinSOP}, \quad \frac{thx}{thx'} = \frac{1}{csTOP} = \frac{1}{sinPOQ},$$

получаем, что $\angle\ SOP$ и $\angle\ TOQ$—углы параллельности отрезков x' и y', откуда $OS \parallel PR$, $OT \parallel QR$.

Наконец легко видеть, что R представляет угол параллельности отвечающий $QS = PT$. Из $\triangle QSO$ имеем: $thQS = \frac{shy'}{tgOSQ} = shy'shx' = csR$ т. к. $tgQOS = \frac{1}{shx}$.

Из $\triangle QSO$ имеем: $thQS = \frac{shy'}{tgQOS} = shy'shx' = csR$, так как $tgQOS = \frac{1}{shx}$, вследствие чего $csR = thQS$ и R угол параллельности QS.

§ 3. Из только что изложенного прежде всего вытекает построение прямой $\parallel$ данной, проходящей через данную точку.

Построение предполагает опускание и восстановление перпендикуляров—как известно, не зависящее от аксиомы о параллельных и поэтому в пространстве Лобачевского производится так же, как в Эвклидовом.

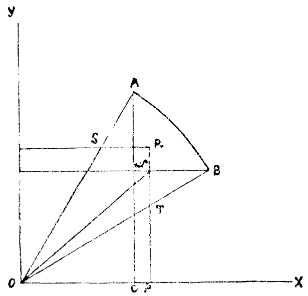
Для проведения из $O : OT \parallel QR$ опускают из O — $OQ \perp QR$ и $OP \perp OQ$ и взяв какую либо точку P:$PR \perp OP$.

Описывая круг радиуса равного QR из O, определяют точку T—OT будет $\parallel RQ$.

В связи с этим основным построением находятся задачи:

О построениях по отрезку ему отвечающего угла параллельности и обратно по углу параллельности отрезка.

Проводится из O отрезок OQ равный данному, $OP \perp OQ$, $QR \perp OQ$. Описывается окружность радиуса $OT = QO$; $\angle TOQ$ искомый (черт. 2).



Чертеж 2.

Для решения обратной задачи берем прямую OA и на ней произвольный отрезок OS. Откладывается $\angle\ SOX$=данному α (как в

Эвклидовой геометрии). $OQ \perp OX$ и из S проводим $SQ \perp OQ$. С помощью трипрямоугольника $ORJQ$ проводится, как выше указано, $OB \parallel QS$. Описывается круг какого-нибудь радиуса из O; $AC \perp OX$ и $BD \perp OY$ определяют пересечением точку диагонали N. В самом деле, из $\triangle\ ORQ$ $csROQ = \frac{thy'}{thz}$, из $\triangle\ ORP$ $csROP = sinROQ = \frac{thx'}{thz}$, $tgROQ = \frac{thx'}{thy'}$; а на основании того, что $\angle\ SOQ$ угол парал. x', $\angle\ TOQ$ уг. пар. y', $csSOP = thx'$, $csTOQ = thy'$ и $tgROQ = \frac{csSOP}{csTOQ}$.

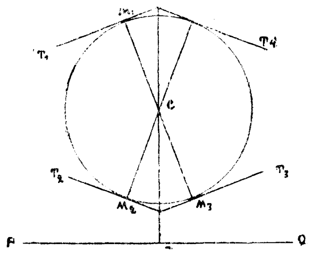
Рассматривая таким же образом трипрямоугольник $DNCO$, получаем:

$$\frac{csSOP}{csTOQ} = \frac{thx_1'}{thy_1'} = tgNOD;\quad x_2' = OC,\quad y_2' = OD;\quad tgROQ = tgNOD.$$

$\angle ROQ = \angle NOD$, что и доказывает построение.

§ 4. Отсюда вытекают интересные решения элементарных задач, относящихся к кругу. Построение касательной в данной точке к окружности совершается так же, как в Эвклидовом пространстве, так как основная теорема о перпендикулярности касательной к радиусу остается в силе и в геометрии Лобачевского.

То же относится и к построению касательной из данной точки M к окружности с центром в C и с радиусом R, состоящему в описании из M окружности радиуса MC, из C—окр. рад. $CN = 2R$ и проведении $MP \perp CN$ (N—точка пересечения описанных нами окружностей радиусами MC и $2R$).



Чертеж 3.

Но построение касательной $\parallel$ данной прямой получает совершенно иное решение. Прежде всего проводится через центр C (черт. 3). $CS \parallel PQ$ (данной прямой) (2 решения). Строится по R—„угол параллельности" и откладывается вниз, вверх от CS, вправо и влево от C, что дает ч е т ы р е точки по окружности: M_1, M_2, M_3, M_4, в которых следует провести перпендикуляры к радиусам: M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, M_4T_4 Как и следовало ожидать, имеем ч е т ы р е р е ш е н и я.

§ 5. Переходим теперь к построению простейших формул.

Суммы и разности отрезков и углов $a+b$ строятся совершенно так же, как в Эвклидовом пространстве.

Построению произведения ab и частного $\frac{a}{b}$ отвечает построение z из уравнений

$$chz = chx\, chy;\quad chz = \frac{chx}{chy}, \tag{11}$$

где $\quad a = chx,\quad b = chy.$

Построение первое очевидно—построение гипотенузы по 2 катетам, второе—это построение катета по гипотенузе и другому катету (как в Эвклидовой Геометрии). В частности имеем:

$$chz = (chx)^2.$$

От этих выражений легко перейти к более общему:

$$chz = \frac{chx_1\, chx_2 \ldots\ldots chx_m}{chy_1\, chy_2 \ldots\ldots chy_n}. \tag{12}$$

Для построения аналогичных выражений в sh, th следует уметь переходить от ch, th к sh, т. е. строить решения уравнения

$$chz = shx \tag{13}$$

Для этой цели необходимо построение решения:

$$sh\lambda = 1, \tag{14}$$

иначе говоря,—отрезка, которому отвечает угол параллельности в 45^0.

Построение это осуществляется по методу § 3. Переписав уравнение (13) в виде $chz = \frac{shx}{sh\lambda}$, видим, что задача сводится к нахождению в трипрямоугольнике x по y' и y. Это достигается следующим образом: проводится OY, на нем отрезок OQ, отвечающий y' и $QR \perp OQ$. Описывается окружность радиуса y из Q. Угол TOQ—угол пар. y'. Зная же OS и OT, определяем, как делали выше, точку диагонали OR, самую диагональ и строим трипрямоугольник. Обратный переход сводится к нахождению в трипрямоугольнике y по y' и x. По катетам строится $\triangle OQR$. Проводится $OP \perp OQ$ и $RP \perp OP$. Кстати укажем и построение x', y' по x, y. Прямоугольный треугольник OQS строится по гипотенузе $OS = y$ и $\angle OSQ$—углу параллельности x. Угол R строится, как угол паралл. QS.

Переход от th к ch по формуле (7).

$$sin\,\Pi(z) = \frac{1}{chz}\,,\quad cs\Pi(x) = thx,$$

где Π означает угол параллельности, отвечающий z, x.

Последнее же уравнение пишем в виде:

$$sin[90^0 - \Pi(x)] = thx,$$

откуда следует, что построение решения уравнения:

$$chz = \frac{1}{thx} \tag{14}$$

сводится: 1) к определению угла параллельности $\Pi\,(x)$, 2) к определению отрезка z, отвечающего углу параллельности $\Pi(z) = 90^0 - \Pi(x)$.

Таким образом, на ряду с выражением (12) можно также строить и выражения:

$$shz = \frac{shx_1\, shx_2 \ldots\ldots shx_m}{shy_1\, shy_2 \ldots\ldots shy_n} \qquad thz = \frac{thx_1\, thx_2 \ldots\ldots thx_m}{thy_1\, thy_2 \ldots\ldots thy_n}. \tag{15, 16}$$

Решение $shz = \frac{shx}{shy}$ проще строить без перехода к ch способами аналогичными употребляемым в Эвклидовой Геометрии для построения $\frac{a}{b}$.

Строится прямоугольный треугольник OAB с катетом $AB = x$ и гипотенузой y, на продолжении гипотенузы OA откладывается $OC = \lambda$, из C проводится $CD \perp OB$. CD дает z

§ 6. Скажем несколько слов о простейших иррациональных выражениях. Решение уравнения

$$ch^2 z = chx, \tag{17}$$

а отсюда $\qquad sh^2 z = shx, \; th^2 z = thx$

совершается таким образом: в равнобедренном прямоугольнике ABC гипотенуза x связана с катетом z соотношением (17). Поэтому построение z сводится к построению ACD с углом $\angle ACD = 45^0$ и катетом $AD = \frac{x}{2}$. Отюда выводим и построения

$$chz = \sqrt{\frac{chx_1\, chx_2 \ldots\ldots chx_m}{chy_1\, chy_2 \ldots\ldots chy_n}} \quad \text{и т. д.} \tag{18}$$

Другой тип иррациональных выражений определяется уравнением:

$$sh^2 z = sh^2 x + sh^2 y. \tag{19}$$

Это ни что иное, как построение в трипрямоугольнике диагонали OR по двум сторонам. Но в конце последнего параграфа было указано, как строить по x, y трипрямоугольник. Решение уравнения

$$sh^2 x = sh^2 z - sh^2 y \tag{20}$$

сводится к построению трипрямоугольника по диагонали и одной стороне острого угла—к построению прямоуг. $\triangle ORP$ по катету и гипонетузе и по нему трипрямоугольника.

В формулах (19) и 20) возможна замена одного слагаемого единицей, полагая $x = \lambda$ и т. д., т. е. возможно построение выражений из уравнений:

$$sh^2 z = 1 \pm sh^2 x, \; sh^2 z = sh^2 x - 1.$$

Далее, полагая $x = \lambda$, имеем $sh^2 z = 2$. Решая ур. $sh\omega = sh^2 z$ получаем $sh\omega = 2$. Совершенно таким же образом строим решение $sh\omega = 3$ и вообще

$$sh\omega = N, \tag{21}$$

где N целое положительное число.

В самом деле ур. (21) можно написать так:

$$sh\omega = 2 + sh^2\lambda,\quad sh^2 m = sh^2 z + sh^2\lambda$$

и свести к решению $sh^2 z = 2$ и $sh\omega = sh^2 m$ и т. д.

Отсюда вытекает возможность построения выражений:
$shz = \Omega\,(sh\alpha, sh\beta, sh\gamma....)$, $chz = \Omega\,(ch\alpha, ch\beta, ch\gamma....)$, $thz = \Omega\,(th\alpha, th\beta, th\gamma...)$ где Ω рациональная дробь с коэффициентами, равными рациональным числам, или вообще

$$chz = \Omega\,(sh\alpha,\ sh\beta..\ ch\alpha,\ ch\beta..\ th\alpha,\ th\beta...) \text{ и т. д.,}$$

или

$$chz = \sqrt{\Omega\,(sh\alpha....\ th\alpha....)},$$

или когда chz определяется квадратным уравнением

$$P_0 ch^2 z + P_1 chz + P_2 = 0, \tag{23}$$

где P_0, P_1, P_2—целые полиномы от $sh\alpha$, $sh\beta$, $ch\alpha$, $ch\beta$, $th\alpha$, $th\beta$.. с целыми коэфициентами.

Такое выражение будем называть выражением 2-го порядка и 1-го класса, если оно не сводится к рациональному.

Но, умея строить такие выражения, мы будем в состоянии построить и выражение 2 порядка—2 класса:

$$\varphi_0 ch^2 z + \varphi_1 chz + \varphi_2 = 0, \tag{24}$$

где φ_i полиномы с целыми коэффициентами от $sh\alpha$, $sh\beta$.. $ch\alpha$, $ch\beta$.. $th\alpha$, $th\beta$.., и $sh\alpha_1$, $sh\beta_2$.....$ch\alpha_1$, $ch\beta_1$.. $th\alpha_1$, $th\beta_1$.., определяемых уравнениями типа (24).

Далее можем строить и выражения 3, 4-го и т. д. классов и можем утверждать, что, как и в Эвклидовом пространстве, с помощью циркуля и линейки возможны построения второго порядка и какого угодно класса [1]).

§ 7. Исследуем теперь построение углов по отрезкам.

Простейшее построение $\sin A = \frac{shx}{shy}$ — построение прямоуг. треугольника по двум катетам. Построение $cs\,A = \frac{thx}{thy}$ — прямоуг. треуг. по катету и гипотенузе. Построение $csA = thx\,thy$, $csA = chx'chy'$ —трипрямоугольника по парам сторон (x,y) (x',y'). Чтобы вывести возможность построения A, определяемого уравнением

$$P_0 cs^2 A + P_1 csA + P_2 = 0, \tag{26}$$

[1]) Klein. Elementargeometrie. Enriques. Fragen der Elem. Math. II. art V. Petersen. Théorie des équations algébriques. Paris; 1897 ch. VII.
Д. Мордухай-Болтовской. О построениях с помощью алгебр. кривых. Варш. Об. Ест.

и вообще выражения 2-го порядка, следует только указать переход от углов к отрезкам и обратно. Этот переход совершается переходом от угла параллельности к отвечающему ему отрезку по одной из формул

$$sinA = \frac{1}{cha},\quad csA = tha,\quad tgA = \frac{1}{cha}.$$

Делая такой переход для величин, заключающихся в P_j, мы получаем вместо ур. (23), (26) более общие

$$P_0(ch\alpha, ch\beta ..\ csA,\ csB..)ch^2z + \ .\ .\ . = 0, \qquad (27)$$

$$P_0(ch\alpha, ch\beta ..\ csA,\ csB.)cs^2A + \ .\ .\ . = 0. \qquad (28)$$

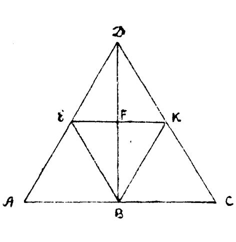
§ 9. Из Штейнеровских[1]) элементарных задач: 1) Проведения параллельных; 2) Умножения и 2') деления отрезков; 3) Проведения перпендикуляров; 4) Умножения углов; 5) Деления их пополам; 6) Проведения прямой под данным углом (или перенесение угла); 7) Проведения из данной точки отрезка прямой, равного по длине и направлению данному,—только часть (2)' неразрешима при помощи циркуля и линейки, о чем будем ниже говорить подробнее.

Чтобы быть в состоянии построить всякое выражение 2-го порядка, необходимо Штейнеровские задачи еще пополнить задачей:

8) О построении прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе,—которая тоже решается с помощью циркуля и линейки.

Как известно, в Эквидовом пространстве она решается с помощью наугольника, параллельной линейки и обычного циркуля переменного раскрытия. Масштаб же Гильберта[2])—линейка с нанесенным на ней отрезком—дает возможность строить только 7 Штейнеровских задач, а решение 8-ой с его помощью не осуществляется.

Такова же мощность циркуля постоянного раскрытия в пространстве Лобачевского. Деление угла пополам совершается обычным путем. Что касается до деления пополам отрезка, то если отрезок велик, приходится сперва выделить части, равные радиусу циркульного раскрытия R, начиная с A и B, и делить остающийся остаток меньший R.



Чертеж 4.

Умножение отрезков совершается с помощью переноса циркулем частей R и с помощью переноса остатка меньшего R следующим построением (черт. 4). В конце отрезка AB: $BD \perp AB$. $EF \perp BD$, $BE = R$. $\angle EBF$ удваивается до $\angle EBK$. $BK = R$.

---

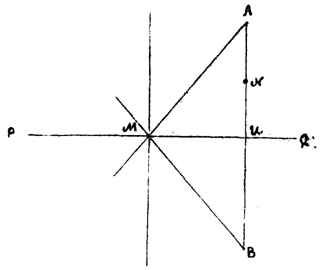
[1]) Адлер. Геометрические построения.

[2]) Hilbert. Grundlagen der Geometrie. 4 Aufl. Leipzig 1913. Kap. VII. Feldblum. über element. geom. Konstr. Diss. Warschau, 1899. Tilly (Mathesis V 1885) Simon (Zeitschr. für Math. und Physik. 22. 1891) и другие.

Удвоение не трудно произвести с циркулем постоянного раскрытия. DK определяет C так, что $BC=AB$. В построение входит опускание перпендикуляра, о чем будет говориться ниже.

Изложенное основывается без аксиомы о параллельных и годно, как в Эвклидовой, так и Неэвклидовой Геометрии.

Восстановление перпендикуляра из M (черт. 5). Из точки N достаточно близкой к PQ опускается $NU \perp PQ$, На NU откладываются отрезки $UA=UB$. A и B соединяются с M и проводится биссектриса угла UMA. Построение предполагает перенос отрезка на одной прямой, о котором говорили выше.

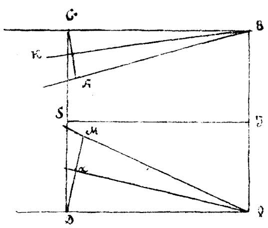


Чертеж 5.

Опускание перпендикуляра при выбранном расстоянии меньшем R может быть выполнено циркулем постоянного раскрытия совершенно так же, как в Эвклидовой Геометрии.

Опускание перпендикуляра при большем расстоянии совершается так: (черт. 6) восстанавливается в точке U на PQ перпендикуляр UN, из M проводится $MN \perp NU$, откладывается и проводится $JK \perp NJ$ затем $KJ=NM$, точка M соединяется с K, тогда $MK \perp PQ$.

Перенос отрезка AB по PQ совершается так: (черт. 6) соединяем B с Q (если на PQ следует отложить отрезок от Q). Проводим в середине $BQ—J \ldots JS \perp PQ$, BC и $QD \perp BQ$, биссектрису BK угла ABC и $AC \perp BK$, $CD \perp JS$, биссектрису QL угла DBP и $DM \perp QL$. Тогда точка пересечения M определит $MQ=AB$.



Чертеж 6.

Перенос угла совершается с помощью переноса прямоугольного треугольника, который сводится к переносу катетов по только что указанному правилу.

Построение параллельных осуществляется согласно § 3, беря QR=раскрытию циркуля.

Задача же 8, решение которой для Эвклидовой Геометрии зависит от теории параллельных, не находит себе разрешения.

§ 10. Так как формулы Геометрии Лобачевского так же, как формулы Геометрии Эвклидовой, дают возможность строить только квадратные радикалы, то задача о возможности построения с помощью циркуля и линейки здесь сводится к возможности разрешения уравнения, определяющего координаты точки, решающей вопрос, в квадратных радикалах или приведения этого уравнения к виду (24) § 6.

Здесь следует сделать замечание: 1) так как $ch\alpha = \sqrt{1+sh^2\alpha}$, $th\alpha = \frac{sh\alpha}{ch\alpha}$, то можно вводить только один род величин $sh\alpha$. 2) $\alpha_1, \alpha_2 \ldots.$ представляют произвольно заданные отрезки, в числе которых и масштабная единица остается тоже произвольной.

В основе исследований (как и в Эвклидовой Геометрии) лежит теорема:

Корень неприводимого уравнения

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{29}$$

только тогда выражается в квадратных радикалах, если n степень 2 [1]).

Эту теорему следует относить не к области целых рациональных чисел, а к области целых рациональных чисел и параметров $\xi_1, \xi_2 \ldots,$ входящих в c_j (по нашей терминологии c_j R-функции от ξ_j).

Обычное доказательство проводится и для этого случая, если предварительно доказать голоэдричность [2]) этой области, т. е. наличность всех тех свойств целых чисел, на которых основывается вывод теоремы Гаусса.

Тогда невыражаемость корня кубического уравнения доказывается просто его неприводимостью.

Что касается до уравнения 4-ой степени

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0, \tag{30}$$

то вследствие того, что корни разрешающего его уравнения:

$$4a_0^3t^3 - a_0J_1t + J_2 = 0, \tag{31}$$

где

$$J_1 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$J_2 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3,$$

выражаются рационально через корни ур. (30), то дело сводится к доказательству неприводимости ур. (31) или, что то же, к доказательству невозможности рационального корня у этого уравнения.

Следует отметить, что, если J_1, J_2 целые полиномы от ξ_j, то рациональный корень t должен быть обязательно целым.

---

1) Petersen. Théorie der équations algébriques. P. 150—151.

2) Д. Мордухай-Болтовской. О некоторых арифметических свойствах регулярных интегралов линейных дифференциальных уравнений: Мат Сб. т. XXVI. 1907.

§ 11. Задача о делении отрезка на три равные части в Геометрии Лобачевского является настолько же трудной, как деление угла на три равные части, при чем, согласно § 7, мы можем с помощью циркуля и линейки построить решение уравнения:

$$chz = csA,$$

а потому уравнение деления угла

$$4cs^3A - 3csA = m, \quad m = cs3A \tag{32}$$

сводится к уравнению

$$4ch^3z - 3chz = m, \tag{33}$$

т. е. к делению отрезка.

Задача эта не может быть разрешена с помощью циркуля и линейки в силу неприводимости уравнения

$$4x^3 - 3x = m. \tag{34}$$

Более интересным является положительный результат, а именно доказательство возможности этого построения с помощью кривых второго порядка.

А именно мы докажем, что три корня уравнения (34) определяются, как координаты трех точек пересечения кривой второго порядка

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY = 0, \tag{35}$$

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1, \tag{36}$$

с кругом
$$aX + bY + Z = 1, \tag{37}$$

проходящим вместе с этой кривой через начало координат.

Здесь X, Y, Z координаты точки в Геометрии Лобачевского, причем, как известно, X, Y, Z связаны уравнением (36):

$$X = sh\,QM, \quad Y = shPM, \quad Z = chOM.$$

Мы покажем, что такой кривой может быть взята, определяемая уравнением:

$$XZ = \alpha(Z^2 - 1) \tag{38}$$

При этом будет доказано, что координаты центра и радиус круга

$$\alpha' = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}, \quad \beta' = -\frac{b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}}; \quad chr = \frac{1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \tag{39}$$

могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

Далее будет доказано, что этой кривой является эллипс, элементы которого строятся тоже с помощью циркуля и линейки.

Исключение X, $У$ из уравнений (36), (37), (38) дает уравнение 4-ой степени:

$$[(b^2 + a^2)\alpha^2 + (1 - b^2) + 2a\alpha]Z^4 - 2(1 + a\alpha)Z^3 +$$
$$+ [-2\alpha^2(b^2 + a^2) - 2a\alpha + 1 + b^2]Z^2 + 2a\alpha Z + \alpha^2(a^2 + b^2) = 0,$$

а по разделении на $Z-1$:

$$[(b^2+a^2)\alpha^2+1-b^2+2a\alpha]Z^3+[-1+\alpha^2(a^2+b^2)-b^2]Z^2+$$
$$+[-\alpha^2(a^2+b^2)-2a\alpha]Z-\alpha^2(a^2+b^2)=0. \qquad (40)$$

Для совпадения (34) и (40) необходимо выполнение условий:

$$\alpha^2(a^2+b^2)-b^2=1,\ \alpha^2(a^2+b^2)+2\alpha a+3b^2=3,\ (m-2)\alpha^2(a^2+b^2)+2ma\alpha=0,$$

Полагая $\qquad \alpha^2(a^2+b^2)=\xi,\ b^2=\eta,\ a\alpha=\zeta, \qquad (41)$

получаем линейные уравнения:

$$\xi-\eta=1,\quad \xi+2\zeta+3\eta=3,\quad (m-2)\xi+2m\zeta=0,$$

дающие

$$\xi=\frac{6m}{3m+2},\ \eta=\frac{3m-2}{3m+2},\ \zeta=-\frac{3(m-2)}{3m+2}. \qquad (42)$$

ξ, η, ζ, можно построить, а по ним на основании ур. (41), дающих выражения второго порядка, a, b, x, а по (39)—α', β', γ', r.

§ 12. Чтобы решить, что представляет кривая (35, 36)—эллипс или гиперболу, совершаем преобразование координат, сдвигая O по OX на отрезок d.

Тогда [1] $\qquad X=Z'shd+X'chd,\ Y=Y',\ Z=Z'chd+X'shd, \qquad (43)$

что дает

$$(\alpha\, sh^2d-shd\, chd)Z'^2+(\alpha ch^2d-shd\, chd)X'^2+$$
$$+(2\alpha\, shd\, chd-sh^2d-ch^2d)X'Z'+Y'^2\alpha=0;$$

d подбираем таким образом, что

$$2\alpha chd\, shd-sh^2d-ch^2d=0,\quad th2d=\frac{1}{\alpha}. \qquad (44)$$

Если $\alpha>1$, то последнее уравнение имеет вещественный корень.

Если положить $sh\omega=\frac{1}{\alpha}$, то $sh2d=\frac{sh\omega}{\sqrt{1-sh^2\omega}}=\frac{sh\omega}{\sqrt{sh^2\lambda-sh^2\omega}}$,

$$sh^2d=\frac{ch2d-1}{2},\ ch^2d=\frac{ch2d+1}{2};\ sh\,2d=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}},\quad ch2d=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}};$$

$$sh^2d=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{2\sqrt{\alpha^2-1}},\quad ch^2d=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2\sqrt{\alpha^2-1}},$$

$$\alpha sh^2d-shd\, chd=\sqrt{\alpha^2-1}-\alpha;\ \alpha ch^2d-shd\, chd=\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha.$$

Уравнение кривой представляется в виде

$$s_1X'^2+s_2Y'^2-s_3Z'^2=0,$$

$$s_1=\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha,\ s_2=\alpha,\ s_3=-\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha,$$

[1] Barbarin. Etudes...

Успенский. Введение в неэвклидову Геометрию, глава V.

так что $s_1 s_2 > 0$, что указывает на то, что получаемая кривая — эллипс. Но в изложении предполагалось ограничение для α, а потому и для отрезка. Мы докажем теперь, что это ограничение может быть снято. Прежде всего разумелось, что уравнение (41) дает вещественное α. Из них

$$\alpha = \sqrt{\frac{9m^2+48m-36}{9m^2-4}}; \tag{44}$$

но при $m>1$ (что должно иметь место, ибо всегда $ch>1$) подрадикальное выражение положительно, а потому и вещественно. Далее при $m>1$ также $\alpha>1$. В самом деле это утверждение равносильно следующему

$$9m^2+48m-36>9m^2+4$$

что при $m>1$ всегда имеет место.

§ 13. Найдем теперь геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух точек величина постоянная, и докажем, что это эллипс, и что всякий эллипс можно рассматривать, как такое геометрическое место, что дает обычный способ вычерчивания непрерывным движением эллипса. OX направлено через F и F', так что координаты

$$F(\delta,0,\sqrt{1+\delta^2}) \text{ и } F'(-\delta,0,\sqrt{1+\delta^2})$$

$$\delta = shOF = shc,\ r+r'=2a,\ ch(r+r') = chr\, chr' + shr\, shr'$$

$$chr = -X\delta + Z\sqrt{1+\delta^2},\quad shr = \sqrt{X^2\delta^2+Z^2(1+\delta^2)-2XZ\delta\sqrt{1+\delta^2}-1},$$

$$chr' = X\delta + Z\sqrt{1+\delta^2},\quad shr' = \sqrt{X^2\delta^2+Z^2(1+\delta^2)+2XZ\delta\sqrt{1+\delta^2}-1},$$

$$\sqrt{R} - [X^2\delta^2 - Z^2(1+\delta^2)] = \rho.$$

По освобождении от радикала и сокращении

$$\delta^2(1-\rho)X^2 + (1+\delta^2)(1+\rho)Z^2 + \frac{\rho^2-1}{2} = 0$$

и, окончательно:

$$(\rho-1)\left[\delta^2+\frac{\rho+1}{2}\right]X^2 + \frac{\rho^2-1}{2}Y^2 - (\rho+1)\left[\delta^2+\frac{\rho+1}{2}\right]Z^2 = 0, \tag{45}$$

$$s_1X^2 + s_2Y^2 - s_3Z^2 = 0,$$

$$s_1 s_2 > 0,$$

так как $\rho = ch2a > 1$, т. е. уравнение эллипса. s_1, s_2, s_3 можно построить с помощью циркуля и линейки и то же относится к ρ и σ.

В самом деле: $\dfrac{\rho-1}{\rho+1} = \dfrac{s_1}{s_3}$, $\dfrac{\sigma^2+\frac{\rho+1}{2}}{\frac{\rho+1}{2}} = \dfrac{s_1}{s_2}$,

откуда

$$\rho = \frac{s_3+s_1}{s_3-s_1} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{s_3(s_1-s_2)}{s_2(s_3-s_1)}} = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2\ 1}}{2a}}. \tag{46, 47}$$

§ 14. Построения треугольника 1) по трем сторонам, 2) по двум сторонам и углу между ними, 3) по стороне и двум прилежащим углам, как основанные только на теоремах о конгруэнции треугольников, независимых от постулата о параллельных, остаются в силе в пространстве Лобачевского.

Построение по трем углам совершается тоже при помощи циркуля и линейки, так как cha выражается рационально через триг. вел. A, B, C

$$cha = \frac{csA + csB\,csC}{sinB\,sinC}. \tag{48}$$

Но что особенно интересно: и построение по двум сторонам a, b и углу A, противолежащему a, совершается тоже с помощью циркуля и линейки.

Исследуем геометрическое место вершин равных углов, опирающихся на определенный отрезок.

Направив OX по основанию, OY перпендикулярно через середину, получим для координат концов отрезка

$$x_1 = sh\alpha,\ y_1 = 0,\ z_1 = ch\alpha;\ x_2 = -sh\alpha,\ y_2 = 0,\ z_2 = ch\alpha.$$

Прямые M_1M, M_2M будут иметь уравнения

$$ux + vy - wz = 0,\ u'x + v'y - w'z = 0, \tag{49}$$

где

$$u\,sh\alpha - w\,ch\alpha = 0,\ u'sh\alpha + w'ch\alpha = 0,$$

в силу чего уравнения (49) приводятся к виду

$$ch\alpha\ x - sh\alpha\ z + vy = 0,\ ch\alpha\ x + sh\alpha\ z - v'y = 0. \tag{50}$$

На основании известной формулы для косинуса угла между 2 прямыми, имеем

$$\frac{-sh^2\alpha - vv' - ch^2\alpha}{\sqrt{1+v^2}\ \sqrt{1+v'^2}} = C,$$

а заменяя v, v' их значениями из уравнений (50),

$$\frac{x^2ch^2\alpha - z^2sh^2\alpha + (ch^2\alpha + sh^2\alpha)y^2}{\sqrt{y^2 + (zsh\alpha - xch\alpha)^2}\ \sqrt{y^2 + (zsh\alpha + xch\alpha)^2}} = C,$$

$$(x^2ch^2\alpha - z^2sh^2\alpha + \omega y^2)^2 = C^2\left[(y^2 + z^2sh^2\alpha + x^2ch^2\alpha)^2 - 4z^2x^2sh^2\alpha ch^2\alpha\right], \tag{51}$$

т. е. уравнение кривой 4-го порядка.

Если взять за другое геометрическое место окружность $z = const$, описанную из середины основания или гиперцикл $y = const$, то для $\xi = x^2$ получим квадратное уравнение, и точка пересечения может быть построена с помощью циркуля и линейки.

Таким образом, задача о построении треугольника с данным основанием, противоположным углом и с данной медианой или данной высотой решается в пространстве Лобачевского с помощью циркуля и линейки.

Если же взять частный случай прямого угла, то получается уравнение эллипса:

$$x^2ch^2\alpha+(ch^2\alpha+sh^2\alpha)y^2-z^2sh^2\alpha=0, \qquad (51')$$

и задача о построении треугольника по двум сторонам и углу против одной из них сводится к определению точки пересечения эллипса и круга. Когда центр на OX и уравнение круга:

$$ax-cz=1, \qquad (52)$$

задача решается с помощью циркуля и линейки, так как, решая совместно уравнение (52) и уравнение

$$x^2sh^2\alpha-z^2ch^2\alpha=-\omega, \qquad (53)$$

получаем для x уравнение второй степени.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно решить не только вышеупомянутые задачи, но и провести касательную к кругу из точки вне его (§ 4).

§ 15. Исследуем теперь, можно ли задачу о построении треугольника с данным основанием и противоположным углом решить с помощью циркуля и линейки.

Так как центр круга (52) лежит в точке $(sh\alpha,\ 0,\ ch\alpha)$,

то $$\frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}}=sh\alpha, \quad a=\frac{c\,sh\alpha}{ch\alpha},$$

и уравнение круга приводится к виду

$$x\,sh\alpha-z\,ch\alpha=\lambda, \quad x^2+y^2-z^2=-1. \qquad (54)$$

Займемся преобразованием левой части ур. (51).

$$x^2ch^2\alpha-z^2sh^2\alpha+\omega(-1+z^2-x^2)=-sh^2\alpha x^2+ch^2\alpha z^2-\omega=$$
$$=[ch\alpha\, z-sh\alpha\, x][ch\alpha z+sh\alpha\, x]-\omega=-\lambda[ch\alpha\, z-sh\alpha\, x]-\omega.$$

Правая часть, имея в виду, что

$$y^2+z^2sh^2\alpha+x^2ch^2\alpha=-1+z^2ch^2\alpha+x^2sh^2\alpha,$$

легко сводится к $c^2[1+\lambda^2(z\,ch\alpha+x\,sh\alpha)^2]$; окончательно

$$\{-\lambda[ch\alpha\, z+sh\alpha\, x]-\omega\}^2=c^2[1+\lambda^2(z\,ch\alpha+x\,sh\alpha)^2]. \qquad (55)$$

Исключая из этого уравнения и ур. (54) z, получаем уравнение 2-й степени для x.

Таким образом, задача о построении треугольника с двумя данными сторонами и углом, противолежащим одной из них, решается с помощью циркуля и линейки.

§ 16. Возьмем (ограничиваемся случаем прямого угла) круг с центром не на оси x'ов. С помощью такого круга будет решаться задача о построении треугольника с данным основанием, с данным углом при вершине и с данным расстоянием от данной точки вершины.

Точка пересечения тогда уже не строится с помощью циркуля и линейки. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять круг

$$x+y+z=-1,$$

уравнение которого на основании урав.

$$x^2+y^2-z^2=-1,$$

представляется в виде

$$x^2+xz+x+z+1=0,$$

Подставляя в уравнение:

$$x^2 sh^2\alpha - z^2 ch^2\alpha = -\omega,$$

получаем

$$x^4-2x^3-2x^2+2\xi x+\xi=0.$$

где $$\xi=sh^2\alpha.$$

Разрешающее уравнение:

$$4t^3-\left(2\xi+\frac{1}{3}\right)t-\left(\frac{3}{4}\xi+\frac{\xi^2}{4}+\frac{1}{27}\right)=0.$$

Оно должно иметь (§ 10) в случае разрешимости задачи с помощью циркуля и линейки р а ц и о н а л ь н ы й о т н о с и т е л ь н о ξ к о р е н ь, при этом ц е л ы й. Полагая $\xi=at^n+bt^{n-1}+\ldots+d$, выводим, что $3n=n+1$ или $3n=2$; но оба случая невозможны.